UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA **P.A.: 2024-2**

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA **Fecha: 13/12/24**

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE CIENCIAS BASICAS Y HUMANIDADES

EXAMEN FINAL DE
"*MÉTODOS NUMÉRICOS* (M*B536*)"

Coordinador del curso: Ing. Robert Castro Salguero

NOTA IMPORTANTE A LOS ALUMNOS

ESTÁ TERMINANTEMENTE PROHIBIDO COLOCAR DENTRO DEL CUADERNILLO MARCAS (TEXTOSO SEÑALES DE CUALQUIER TIPO) QUE PERMITAN DETERMINAR SU IDENTIDAD. **EN CASO DE INCUMPLIMIENTO, EL EXAMEN SERÁ ANULADO, SIN NINGÚN DERECHO DE RECLAMO**.

INDICACIONES

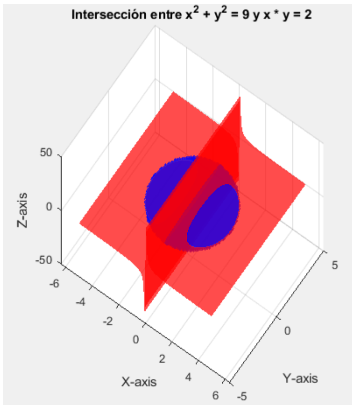
1. Duración: 110 minutos.
2. Revisar que estén completas las hojas del examen. Verificar que haya las 04 preguntas de la Parte I y 04 preguntas de la parte II
3. Se permite el uso de 2 hojas de formulario tamaño A4, sin solucionarios, calculadoras científicas y/o programable sin internet.
4. Prohibido el uso de celulares y medios de comunicación electrónica y calculadoras con Wi-Fi o Bluetooth.
5. Escribe tus respuestas de manera clara y legible y asegúrate de que cada paso de tu razonamiento y cálculo esté claramente justificado.

PROFESORES DEL CURSO:

ROSA GARRIDO /HERMES PANTOJA/MAXIMO OBREGON/ROBERT CASTRO

PARTE I

1. **(1.0P)** Un sistema robótico utiliza dos motores eléctricos, donde las ecuaciones del par y velocidad angular son ecuaciones no lineales, complete el Código en Matlab.




```
% Definición de funciones
f1 = @(x, y) x^2 + y^2 - 9;  % Primera ecuación
f2 = @(x, y) x * y - 2;      % Segunda ecuación
% Derivadas parciales
df1dx = @(x, y) __2*x ______;
df1dy = @(x, y) ____2*y ____;
df2dx = @(x, y) ____y____;
df2dy = @(x, y) ____x____;
% Inicialización
x0 = 2; y0 = 2; % Valores iniciales
tol = 1e-6;          % Tolerancia
max_iter = 50;       % Número máximo de iteraciones
% Iteraciones de Newton-Raphson
for k = 1:max_iter
    % Jacobiano
    J = [df1dx(x0, y0), df1dy(x0, y0);
         df2dx(x0, y0), df2dy(x0, y0)];
       % Función evaluada
    F = [f1(x0, y0);
        f2(x0, y0)];
   % Resolución del sistema lineal
    delta = ___-J\F_________________;
     % Actualización
    x0 = ____ x0 +delta(1)___________________;
    y0 = _____ y0 +delta(2)___________________;
        % Verificación de convergencia
    if norm(delta) < tol    break;
     end
  end
```

2. **(1.0P)** Dado los siguientes puntos

X	0	3	5
y	3	12	5

Considerando que el polinomio interpolante de Lagrange es:

$$P(x) = a * (x-3) * (x-5) + b * x * (x-5) + c * x * (x-3)$$

Calcule a+b+c

Solución

i	xi	yi	dLi	yi/dLi
0	0	3	15	0.2
1	3	12	-6	-2
2	5	5	10	0.5

P(x)=0.2*(x-3)*(x-5)-2*(x-0)*(x-5)+0.5*(x-0)*(x-3)

Por lo tanto, a+b+c=0.2+0.5-2=-1.3

3. **(1.0P)** Considere la integral definida

$$I = \int_1^3 [(x+2)^2 + e^x]\, dx.$$

Determine el valor más pequeño de n, donde n es el número de subintervalos necesarios para aproximar I usando la regla de Simpson 1/3 compuesta.

Solución

Puesto que la magnitud del error en la regla de Simpson compuesta está dado por:

$$|E| = \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(x), \text{ para algún } x \in (a,b)$$

entonces para $a = 1, b = 3, f^{(4)}(x) = e^x$, tenemos:

$$|E| = \frac{(3-1)^5}{180n^4}(e^3) = \frac{2^5}{180n^4} \max_{1\le x\le 3} |e^x| = \frac{2^5}{180n^4} e^3.$$

De aquí:

$$|E| = \frac{32}{180n^4} e^3 \le 10^{-1} \implies \frac{32}{180n^4} e^3 \le 10^{-1} \implies n^4 \ge \frac{32}{180 \cdot 10^{-1}} e^3 \implies n^4 \ge 35.707621.$$

Por lo tanto:

$$n \ge 2.4145011.$$

Como n debe ser un número par, seleccionamos $n = 4$.

4. **(1.0P)** Sea la ecuación diferencial ordinaria con valor de frontera:

$$4x^2\frac{d^2y}{dx^2}+8x\frac{dy}{dx}+y=0 \qquad y(1)=2 \qquad y(2)=3$$

Aproximar y(1.5) usando el método de diferencias finitas, tomando h=0.5 y determine el error si la solución analítica es: $y(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{2}\,\ln(x)\left(\sqrt{2}-3\right)}{\sqrt{x}\,\ln(2)}$

Solución

```
Tomamos: x1=1.5, h=0.5, y0=2, y2=3, y1=??

4*x1^2*(y2-2*y1+y0)/h^2+8*x1*(y2-y0)/(2*h)+y1=0
```

```
Y1a=192/71=2.7042

Y1e=2.7041

Err=1.0241e-04
```

PARTE II

Problema 1

El desplazamiento x (medido en metros) de una masa que experimenta una oscilación amortiguada varia con el tiempo t (medido en segundos) según la siguiente expresión:

$$x = -0.1\, e^{\beta t}\left[cos(\omega t) - \left(\frac{\beta}{\omega}\right) sen(\omega t)\right]$$

Donde β y ω son desconocidos y tienen unidades de seg^{-1}. Al realizar mediciones se obtiene un desplazamiento x_1 de 0.0162 m. en el instante de tiempo t_1 de 0.41 seg., y un desplazamiento x_2 de -0.0026 m. en un instante t_2 de 0.83 seg.

a) **(1.0 Pts)** Plantear el sistema de ecuaciones no lineal.

b) **(2.0 Pts)** Realizar 02 iteraciones del método de Newton-Raphson para sistemas no lineales, partiendo de los valores iniciales β_0= -4 y $\omega_0 = 20$.

c) **(1.0 Pts)** Estime el error, fundamentando la fórmula de error empleada y comente sus resultados.

Solución:

a)

$$F(\beta,\omega) = 0.0162 + 0.1\, e^{0.41\beta}\left[cos(0.41\omega) - \left(\frac{\beta}{\omega}\right) sen(0.41\omega)\right]$$
$$G(\beta,\omega) = -0.0026 + 0.1\, e^{0.41\beta}\left[cos(0.83\omega) - \left(\frac{\beta}{\omega}\right) sen(0.83\omega)\right]$$

b)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \beta} & \frac{\partial F}{\partial \omega} \\ \frac{\partial G}{\partial \beta} & \frac{\partial G}{\partial \omega} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\beta \\ \Delta\omega\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-F(\beta,\omega) \\ -G(\beta,\omega)\end{bmatrix}$$

$$\beta_{n+1} = \beta_n + \Delta\beta \qquad \omega_{n+1} = \omega_n + \Delta\beta$$

β_0=-4 y $\omega_0 = 20$

$$\begin{bmatrix}-0.0021 & -0.0082 \\ -0.0022 & -0.0020\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\beta \\ \Delta\omega\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.0133 \\ 0.0054\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\Delta\beta \\ \Delta\omega\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.8149 \\ 1.8276\end{bmatrix} \qquad err = \left\|\begin{bmatrix}\Delta\beta \\ \Delta\omega\end{bmatrix}\right\|_\infty = 1.8246$$

$$\beta_1 = \beta_0 + \Delta\beta = -4.8149 \qquad \omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega = 21.827$$

$$\begin{bmatrix}-0.0048 & -0.0038 \\ -0.0010 & -0.0013\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\beta \\ \Delta\omega\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.0053 \\ 0.0015\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\Delta\beta \\ \Delta\omega\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.4213 \\ 0.8557\end{bmatrix} \qquad err = \left\|\begin{bmatrix}\Delta\beta \\ \Delta\omega\end{bmatrix}\right\|_\infty = 0.8557$$

$$\beta_2 = \beta_1 + \Delta\beta = -4.3936 \qquad \omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega = 22.6833$$

Se usa para estimar el error, la norma infinita del vector de incrementos. Se observa que las funciones se acercan a cero y los errores están decreciendo, sin embargo, se debería realizar más iteraciones para tener un valor más preciso.

Problema 2

En una planta industrial se bombea esencia de trementina a 60ºC desde la base de una columna de fraccionamiento hasta un gran tanque de almacenamiento descubierto. En la siguiente tabla se muestran los datos relativos al caudal (en litros por hora) que puede bombear la bomba en función de la potencia (en watios) a la que es necesario que trabaje.

Caudal ($\frac{l}{h}$)	700	900	1100	1300
Potencia (w)	361.6	370.64	379.68	384.46

a) [2P] Calcule el spline cúbico natural para aproximar el Caudal que se ajuste a los 4 puntos registrados.

b) [1P] Se dice que el proceso es Eficiente cuando al trabajar a una potencia de 363 watts el Caudal supera los 800 litros por hora respectivamente, en cualquier otro caso la bomba debe ser sometida a mantenimiento. ¿la bomba debe ser sometida a mantenimiento? Justifique

c) [1P] Halle la razón de cambio instantáneo del caudal en el instante en el que la potencia es igual a 370.64 watts

Solución

(a)

h	x=Potencia	y=Caudal	f[,]
h0=9.04	361.6	700	22.1239
h1=9.04	370.64	900	22.1239
h2=4.78	379.68	1100	41.841
	384.76	1399	

$$\begin{bmatrix} 36.16 & 9.04 \\ 9.04 & 27.64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 19.67 \end{bmatrix}$$

Resolviendo:

$$M_1 = -1.1681$$
$$M_2 = 4.6622$$

Intervalo y coeficientes:

Intervalo	a_i	b_i	c_i	d_i
$[361.6 - 370.64 >$	-0.0215	0	23.8796	700
$[370.64 - 379.68 >$	0.1074	-0.5827	18.6124	900
$[379.68 - 384.46 >$	-0.1625	2.3306	34.4141	1100

Intervalo 1: $361.6 \leq x \leq 370.64$

$$S_0(x) = -0.0214843(x - 361.6)^3 + 23.8796(x - 361.6) + 700.$$

Intervalo 2: $370.64 \leq x \leq 379.68$

$$S_1(x) = 0.107422(x - 370.64)^3 - 0.582655(x - 370.64)^2 + 18.6124(x - 370.64) + 900.$$

Intervalo 3: $379.68 \leq x \leq 384.46$

$$S_2(x) = -0.162526(x - 379.68)^3 + 2.330625(x - 379.68)^2 + 34.4141(x - 379.68) + 1100.$$

(b)

$S_0(363) = -0.0215(363 - 361.6)^3 + 0 + 23.8796(363 - 361.6) + 700$

$733.3724 < 800$

Por lo tanto, requiere mantenimiento.

(c)

Solución:

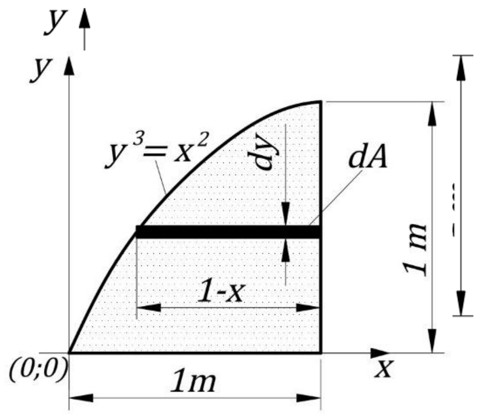
$S_1 = 0.1074(x - 370.64)^3 - 0.5827(x - 370.64)^2 + 18.6124(x - 370.64) + 900$

$s_1'(x) = 0.3222(x - 370.64)^2 - 1.1654(x - 370.64) + 18.6124$

$S_1'(370.64) = 18.6124$

Problema 3

El momento de inercia es muy utilizada en el diseño de las estructuras metálicas de puentes y edificios. Se tiene un perfil estructural con la sección indicada en el gráfico y se desea calcular su momento de inercia (I_x) respecto al eje x.



Considere que:

$$I_x = \int y^2 dA$$

a) **(0.5 Pts)** Considerando que el dA es el diferencial de rectángulo, redefina la integral en términos de dy

b) **(1.5 Pts)** Utilizando la integral del item a, estime I_x usando la fórmula compuesta del trapecio con un paso igual a 0.25

c) **(1.5 Pts)** Utilizando la integral del item a, estime I_x usando la fórmula simple de Simpson de 3/8

d) **(0.5 Pts)** Compare e indique cuál de las dos estimaciones se aproxima mejor, si la integral exacta I_x es 1/9.

Solución

a)

$$I_x = \int_0^1 y^2(1-x)dy = \int_0^1 y^2\left(1 - y^{\frac{3}{2}}\right)dy = \int_0^1 y^2 - y^{\frac{7}{2}}\,dy$$

$$I_x = \frac{y^3}{3} - \frac{2}{9}y^{\frac{9}{2}}\Big]_0^1 = 0.111111$$

b)

$$f(y) := y^2 - y^{\frac{7}{2}} \qquad y0 := f(0) = 0 \qquad y2 := f\left(\frac{2}{4}\right) = 0.161612 \qquad y4 := f(1) = 0$$

$$y1 := f\left(\frac{1}{4}\right) = 0.054688 \qquad y3 := f\left(\frac{3}{4}\right) = 0.197146$$

$$I_x := \frac{\frac{1}{4}}{2} \cdot (y0 + 2 \cdot y1 + 2 \cdot y2 + 2 \cdot y3 + y4) = 0.103361$$

c)

$$y0 := f(0) = 0 \qquad y2 := f\left(\frac{2}{3}\right) = 0.20252$$

$$y1 := f\left(\frac{1}{3}\right) = 0.089728 \qquad y3 := f(1) = 0$$

$$I_x := \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot (y0 + 3 \cdot y1 + 3 \cdot y2 + y3) = 0.109593$$

d)

Por simple comparación, se observa que mejor aproximación se estima en el item d, a pesar de usar menos pasos.

Problema 4

La temperatura $T(x)$ de una tubería de refrigeración en un motor naval está modelada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + 2\frac{dT}{dx} - T = 0,\ 0 \leq x \leq 1$$

Condiciones de frontera:

- En el extremo izquierdo ($x = 0$), la temperatura es constante: $T(0) = 100°C$.
- En el extremo derecho ($x = 1$), no hay flujo de calor saliente: $\frac{dT}{dx}|_{x=1} = 0$.

Parte 1:

1. **(0.5 Pts)** Discretiza la ecuación diferencial con un paso de integración $h = 0.25$, escribiendo la fórmula discreta para los puntos internos.
2. **(1.0 Pts)** Use las condiciones de frontera para formular el sistema de ecuaciones lineales de tamaño 4 que representa la temperatura en los nodos internos de la tubería.
3. **(1.0 Pts)** Resuelve el sistema lineal obtenido para calcular las temperaturas aproximadas T_1, T_2, T_3, y T_4.

Parte 2 (1.5 Puntos):

1. **(1.0 Pts)** Si este problema fuera de valor inicial (PVI) y se conociera la pendiente inicial:

$$\frac{dT}{dx}|_{x=0} = -168.59,$$

   calcula la solución numérica usando el método de Euler con un paso de integración $h = 0.125$, para aproximar T (0.25).

2. **(0.5 Pts)** Responde las siguientes preguntas, considerando que la solución exacta para $x = 0.25$, es $69.01°C$.

   a) ¿Qué tan precisa es esta solución de Euler en comparación con la obtenida por diferencias finitas?

   b) Analiza los resultados obtenidos respecto a su aplicación en sistemas de refrigeración naval.

Solución

Parte 1:

1) N=4 ➔ a=0; b=1; N=4 ➔$h = \frac{b-a}{N}$=0.25

$$\frac{dT(1)}{dt} = \frac{T_f - T_3}{2h} = 0$$

$T_o = 100$ $\quad T_1 = ?$ $\quad T_2 = ?$ $\quad T_3 = ?$ $\quad T_4 = ?$ $\quad T_f = T_3$

$x_0 = 0$ $\quad x_1 = 0.25$ $\quad x_2 = 0.50$ $\quad x_3 = 0.75$ $\quad x_4 = 1.0$ $\quad x_f = 1.25$

$$(1-\mathrm{h})T_{i-1} - (2+\mathrm{h}^2)T_i + (1+\mathrm{h})T_{i+1} = 0$$

2)
$$\begin{pmatrix} -2.0625 & 1.25 & 0 & 0 \\ 0.75 & -2.0625 & 1.25 & 0 \\ 0 & 0.75 & -2.0625 & 1.25 \\ 0 & 0 & 2 & -2.0625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -75 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \quad (69.0615 \quad 53.9515 \quad 47.5830 \quad 46.1411)^T$$

3) **Completando:**

$$T = \quad (100 \quad 69.0615 \quad 53.9515 \quad 47.5830 \quad 46.1411)^T$$

Parte 2

$$z'_1 = z_2 \qquad\qquad z_{1(0)} = 100$$
$$z'_2 = 2z_2 + z_1 \qquad\qquad z_{2(0)} = -168.95$$

$$F(t,z) = \begin{bmatrix} z_2 \\ -2z_2 + z_1 \end{bmatrix}$$

$$Z^{(i+1)} = Z^{(i)} + hF(x_i, Z^{(i)}) \qquad h = \frac{0.25}{2}$$

$$i = 0 \ , \ x_0 = 0 \qquad z^{(0)} = \begin{bmatrix} 100 \\ -168.95 \end{bmatrix}$$

$$Z^{(1)} = Z^{(0)} + hF(t_0, Z^{(0)}) = \begin{bmatrix} 78.88 \\ -114.2125 \end{bmatrix}$$

$$Z^{(2)} = Z^{(1)} + hF(t_1, Z^{(1)}) = \begin{bmatrix} 64.6046 \\ -75.7992 \end{bmatrix}$$

Precisión:T(x=0.25) =69.01°C Solución analítica

Error_euler= 14% 1 dígito significativo

Error_DF= 0.075% 3 dígitos significativos. Por lo que, si es posible usar diferencias finitas para en sistemas de refrigeración naval con el paso de integración adecuado, se recomienda bajar el paso de integración en el caso de Euler.